ENSA d'Al-Hoceima | Année 2020/2021
AP-II, 2ème année, | Semestre 3
Algèbre Quadratique, | TD1

Solutions de la série N^{o}1 : Réduction d'endomorphismes et de matrices

Exercice 1
Soit A la matrice donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver l'endomorphisme φ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer le déterminant de A.
3. Déterminer la matrice inverse A^{-1}. φ est-il bijectif ?
4. Déterminer φ^{-1} relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer le polynôme caractéristique de φ, le spectre de A, les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A.
6. Déterminer une matrice P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $T = P^{-1}AP$.

Solution : Soit $\mathcal{B} = \{e_1; e_2; e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$ où $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est l'endomorphisme dont A est une matrice.

1. L'endomorphisme φ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est définie par :
$$\begin{cases} \varphi(e_1) & = 2e_1 + 2e_2 + 1e_3, \\ \varphi(e_2) & = -2e_1 + 2e_2 + 1e_3, \\ \varphi(e_3) & = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 \end{cases}$$
2. Le déterminant de A est $\det(A)$ donné par
$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(4-2) + 2(4-2) + 2(2-2) \\ &= 4 + 4 + 0 \end{aligned}$$
d'où $\det(A) = 8$.
3. La matrice inverse A^{-1} : d'après la question 2, on a $\det(A) = 8$ alors A est inversible et donc φ est-il bijectif.
Calculons La matrice inverse A^{-1}, en effet
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{Com}(A))^T = \frac{1}{8}(\mathrm{Com}(A))^T$$
il reste à calculer la comatrice $\Gamma = \mathrm{Com}(A)$ de A, en effet
$$\Gamma_{1,1} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Gamma_{1,2} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \Gamma_{1,3} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\Gamma_{2,1} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad \Gamma_{2,2} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Gamma_{2,3} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$
$$\Gamma_{3,1} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8, \quad \Gamma_{3,2} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Gamma_{3,3} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

donc $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; donc $\Gamma^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -8 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{8}(\mathrm{Com}(A))^T = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -8 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification : on peut vérifier facilement que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

4. Déterminons φ^{-1} relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$: on a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = A^{-1}$$

alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ par

$$\begin{cases} \varphi^{-1}(e_1) & = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2, \\ \varphi^{-1}(e_2) & = \frac{3}{4}e_1 + \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{2}e_3, \\ \varphi^{-1}(e_3) & = -e_1 + e_3 \end{cases}$$

5. – le polynôme caractéristique de φ est donné par $P_A(x) = \det(A - xI_3)$

$$\begin{aligned} \det(A - xI_3) &= \begin{vmatrix} 2-x & -2 & 2 \\ 2 & 2-x & 2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (2-x)\begin{vmatrix} 2-x & 2 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2-x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2-x)((2-x)^2 - 2) + 2(2(2-x) - 2) + 2(2 - 2 + x) \\ &= (2-x)^3 + 2(2-x) - 2(2-x) \end{aligned}$$

d'où $P_A(x) = (2-x)^3$.

– le spectre de A est l'ensemble des valeurs propres de A, soit

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}\, P_A(x) = (2-x)^3 = 0\}$$

d'où $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$, c'est à dire que φ admet une seule valeur propre $\lambda = 2$ de multiplicité 3.

– les vecteurs propres de la matrice A : la matrice A admet une seule valeur propre $\lambda = 2$ de multiplicité 3. Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à 2, alors $Au = 2u$ c'est à dire que

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 2x \\ 2x + 2y + 2z = 2y \\ x + y + 2z = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z \\ y = -x \\ z = -x \end{cases}$$

d'où $u = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$; puis par exemple, on prend $x = 1$ alors l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre 2 est $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ engendré par le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; d'où

$$\mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \{\alpha u \, : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

qui est une droite vectorielle de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

6. Déterminons une matrice P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $T = P^{-1}AP$:
A a une seule valeur propre 2 dont le vecteur propre associé est $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors on doit avoir une matrice $P = (u|v|w)$ et la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; donc il reste à déterminer v et w ; c'est pourquoi on considère $Av = 2v + u$ et $Aw = 2w + v$ avec $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.
– on a $Av = 2v + u$, alors

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 2x + 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2y - 1 \\ x + y + 2z = 2z - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ y = -x - 1 \\ z = -x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

donc on choisit $x = 0$; puis on obtient $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

– on a $Aw = 2w + v$, alors

$$\begin{cases} 2x' - 2y' + 2z' = 2x' \\ 2x' + 2y' + 2z' = 2y' - 1 \\ x' + y' + 2z' = 2z' - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' \in \mathbb{R}, \\ x' + y' = -\frac{1}{2} \\ y' = z' \end{cases}$$

donc on choisit $x' = -1$; puis on obtient $v = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

d'où la matrice $P = (u|v|w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice de Jordan.

Vérification : on a $T = P^{-1}AP$ alors $PT = AP$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $T =$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, alors on peut vérifier facilement que

$$\begin{aligned} PT &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ AP &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement, on en déduit que A n'est pas diagonalisable, mais elle est trigonalisable au sens de Jordan.

□

Exercice 2

Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de A.
3. En utilisant les sous-espaces propres, déterminer une base de $\mathbb{R}^3$.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? si oui, diagonaliser la matrice A.

Solution : Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Le polynôme caractéristique de la matrice A est donné par $P_A(x) = \det(A - xI_3)$

$$\begin{aligned} \det(A - xI_3) &= \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ -1 & 2-x & 1 \\ 1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x) \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 2-x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (1-x)((2-x)(1-x)+1) + (1-2+x) \\ &= (2-x)(x-1)^2 + (1-x) + (x-1) \end{aligned}$$

   d'où $P_A(x) = (2-x)(x-1)^2$.

2. Les valeurs propres et sous-espaces propres de A :
   - les valeurs propres de A : le spectre de A est l'ensemble des valeurs propres de A ; soit

   $$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \,/\, P_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2 = 0\}$$

     donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1; 2\}$; d'où A a deux valeurs propres qui sont 2 d'ordre de multiplicité 1 et 1 d'ordre de multiplicité 2.
   - les sous-espaces propres de A : la matrice A a deux valeurs propres alors

- soit E_1 le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1, alors

$$E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3) = \left\{ u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;:\; Au = 1u \right\}$$

donc

$$\begin{cases} x + z = x \\ -x + 2y + z = y \\ x - y + z = z \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = x \end{cases}$$

d'où $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ est la droite véctorielle de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- soit E_2 le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2, alors

$$E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \left\{ v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \;:\; Av = 2v \right\}$$

donc

$$\begin{cases} x' + z' = 2x' \\ -x' + 2y' + z' = 2y' \\ x' - y' + z' = 2z' \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x' = z' \\ y' = 0 \end{cases}$$

d'où $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \text{ où } \beta \in \mathbb{R} \right\}$ est la droite véctorielle de vecteur directeur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. D'après la question 2, on vient de montrer que les sous-espaces propres $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ sont des droites vectorielles engendrées par $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivement ; alors le système $\{u; v\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$; alors d'après le théorème de la base incomplète on peut déterminer un troisième vecteur w tel que le système $\{u; v; w\}$ serait une base de $\mathbb{R}^3$. C'est pour cela, on prend $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $Aw = w + v$
4. Les sous-espaces propres $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ de A sont des droites vectorielles engendrées par $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivement ; alors le sous-espace vectoriel $E = \mathrm{Ker}(A - I_3) \oplus \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est de dimension 2 qui est inférieure la dimension de $\mathbb{R}^3$; alors la matrice A n'est pas diagonalisable. Soit $P = (u|v|w)$ la matrice formée de vecteurs propres, alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Déterminons une matrice triangulaire supérieure T telle que

$$T = P^{-1}AP$$

soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ cette matrice, alors $PT = AP$ implique

$$\begin{aligned} PT &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2+b+x \\ 0 & 1 & b+y \\ 2 & 0 & a+z \end{pmatrix} \\ AP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & x+z \\ 0 & 1 & -x+2y+z \\ 2 & 0 & x-y+z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{cases} x+z = x+b+2 \\ b+y = -x+2y+z \\ z+a = x-y+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ x = y+2 \\ z = b+2 \end{cases}$$

on peut prendre $y = 1$ alors $x = 3$, $z = b+2$ et $a = 2$, donc $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b+2 \end{pmatrix}$ où b est un paramètre réel.

$\square$

Exercice 3

Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de A.
3. En utilisant les sous-espaces propres, déterminer une base de $\mathbb{R}^3$.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? si oui, diagonaliser la matrice A.

Solution : Considérons la matrice A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Le polynôme caractéristique de la matrice A est donné par $P_A(x) = \det(A - xI_3)$

$$\begin{aligned} \det(A - xI_3) &= \begin{vmatrix} 8-x & -1 & -5 \\ -2 & 3-x & 1 \\ 4 & -1 & -1-x \end{vmatrix} \\ &= (8-x)\begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ -1 & -1-x \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1-x \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -2 & 3-x \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (8-x)((x-3)(x+1)+1) + (2(x+1)-4) - 5(2-4(3-x)) \\ &= -x^3 + 10x^2 - 32x + 32 \end{aligned}$$

d'où $P_A(x) = (2-x)(x-4)^2$.

2. Les valeurs propres et les sous-espaces propres :
   – les valeurs propres de A : le spectre de A est l'ensemble des valeurs propres de A ; soit

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \,/\, P_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-4)^2 = 0\}$$

   donc $\mathrm{Sp}(A) = \{2; 4\}$; d'où A a deux valeurs propres qui sont 2 d'ordre de multiplicité 1 et 4 d'ordre de multiplicité 2.
   – Les sous-espaces propres de A :
   • soit E_2 le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2, alors

$$E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \left\{ u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;:\; Au = 2u \right\}$$

   donc

$$\begin{cases} 8x - y - 5z = 2x \\ -2x + 3y + z = 2y \\ 4x - y - z = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - y - 5z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \\ 4x - y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$$

   d'où $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ est la droite vectorielle de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   • soit E_4 le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 4, alors

$$E_4 = \mathrm{Ker}(A - 4I_3) = \left\{ v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \;:\; Av = 4v \right\}$$

   donc

$$\begin{cases} 8x' - y' - 5z' = 4x' \\ -2x' + 3y' + z' = 4y' \\ 4x' - y' - z' = 4z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x' - y' - 5z' = 0 \\ -2x' - y' + z' = 0 \\ 4x' - y' - 5z' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = z' \\ y' = -x' \end{cases}$$

   d'où $E_4 = \mathrm{Ker}(A - 4I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \\ \beta \end{pmatrix} \text{ où } \beta \in \mathbb{R} \right\}$ est la droite vectorielle de vecteur directeur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. D'après la question 2, on vient de montrer que les sous-espaces propres $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ et $E_4 = \mathrm{Ker}(A - 4I_3)$ sont des droites vectorielles engendrées par $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivement ; alors le système $\{u; v\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$; alors d'après le théorème de la base incomplète on peut déterminer un troisième vecteur w tel que le système $\{u; v; w\}$ serait une base de $\mathbb{R}^3$. C'est pour cela, on prend $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $Aw = 4w + v$.

4. Les sous-espaces propres $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ et $E_4 = \mathrm{Ker}(A - 4I_3)$ de A sont des droites vectorielles engendrées par $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivement ; alors le sous-espace vectoriel $E = \mathrm{Ker}(A - 2I_3) \oplus \mathrm{Ker}(A - 4I_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est de dimension 2 qui est inférieure

la dimension de $\mathbb{R}^3$; alors la matrice A n'est pas diagonalisable. Soit $P=(u|v|w)$ la matrice formée de vecteurs propres, alors $Aw=4w+v$; alors

$$\begin{cases} 8x-y-5z=4x+1 \\ -2x+3y+z=4y-1 \\ 4x-y-z=4z+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-y-5z=1 \\ -2x-y+z=-1 \\ 4x-y-5z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1/3 \\ x=1/3 \\ z=0 \end{cases}$$

donc la matrice $P=(u|v|w)$ formée de vecteurs propres est

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vérification : on a $T=P^{-1}AP$ alors $PT=AP$ avec $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, alors on peut vérifier facilement que

$$\begin{aligned} PT &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \frac{7}{3} \\ 2 & -4 & \frac{1}{3} \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ AP &= \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \frac{7}{3} \\ 2 & -4 & \frac{1}{3} \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement, on en déduit que A n'est pas diagonalisable, mais elle est trigonalisable au sens de Jordan.

$\square$

Exercice 4

Soit A la matrice donnée par

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
3. Étudier la suite A^n des puissances de A.
4. Trigonaliser la matrice A.

Solution : Considérons la A donnée par

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$